Guias de Ondas Metálicos - Parte 2

Polarização - TE $\qquad E_z = 0, \; H_z \neq 0$

Solução:

$$H_z = H_0 \cos(\beta_x x) \cos(\beta_y y)\, e^{-j\beta_z z} \qquad (33)$$

Das eq. (12) e (13), temos:

$$E_x = -\frac{j\omega\mu}{\omega^2\mu\epsilon - \beta_z^2} \frac{\partial}{\partial y} H_z$$

$$E_x = \frac{j\omega\mu\beta_y}{\beta_x^2 + \beta_y^2} H_0 \cos(\beta_x x)\sin(\beta_y y)\, e^{-j\beta_z z} \qquad (34)$$

$$E_y = \frac{j\omega\mu}{\omega^2\mu\epsilon - \beta_z^2} \frac{\partial}{\partial x} H_z$$

$$E_y = \frac{-j\omega\mu\beta_x}{\beta_x^2 + \beta_y^2} H_0 \sin(\beta_x x)\cos(\beta_y y)\, e^{-j\beta_z z} \qquad (35)$$

$$H_x = \frac{1}{\omega^2\mu\epsilon - \beta_z^2} \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x} H_z$$

$$H_x = \frac{j\beta_x\beta_z}{\beta_x^2 + \beta_y^2} H_0 \sin(\beta_x x)\cos(\beta_y y)\, e^{-j\beta_z z} \qquad (36)$$

$$H_y = \frac{1}{\omega^2\mu\epsilon - \beta_z^2} \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y} H_z$$

$$H_y = \frac{j\beta_y\beta_z}{\beta_x^2 + \beta_y^2} H_0 \cos(\beta_x x)\sin(\beta_y y)\, e^{-j\beta_z z} \qquad (37)$$

onde $\beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2 = \omega^2\mu\epsilon$

O casamento das condições de contorno requer que:

$$\left.\begin{array}{ll} \beta_x = \dfrac{m\pi}{a} & m = 0, 1, 2, \ldots \\ \beta_y = \dfrac{n\pi}{b} & n = 0, 1, 2, \ldots \end{array}\right\} \quad (38)$$

No caso de modos TE, é possível termos m ou $n = 0$. Neste caso,

TE_{m0} ou TE_{0n} podem existir.

TE_{00} não pode existir.

No caso de TE_{m0}:

$$\beta_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} E_x = 0 & \\ E_y \neq 0 & * \\ H_y = 0 & \\ H_x \neq 0 & * \\ H_z \neq 0 & * \end{array}$$

Nesse caso os campos se assemelham aos campos do modo TE_m em um guia de placas paralelas.

A relação de dispersão p/ o modo TE_{mn} geral:

$$\beta_z = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \quad (39)$$

Exemplo:

Projetar um guia de onda que suporte a propagação apenas do modo TE_{10}.

A frequência de corte é dada por:

$$\omega_{mnc} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]^{1/2}$$

Como $a > b$ (normalmente), logo o modo TE_{10} tem a frequência de corte mais baixa, dada por:

$$f_{10c} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} \cdot \frac{m\pi}{a} = \frac{v}{2a}$$

$$\frac{c}{\lambda} = \frac{v}{2a} \Rightarrow a = \frac{v}{c}\frac{\lambda}{2}$$

ou $f_{10c} = 2a$ ×

A próxima freq. mais alta é f_{20c} ou f_{01c}, dependendo da razão a/b

$$f_{20c} = \frac{v}{a} \qquad f_{01c} = \frac{v}{2b}$$

Se $a > 2b \Rightarrow f_{20c} < f_{01c}$

Se $a < 2b \Rightarrow f_{20c} > f_{01c}$

Se $a = 2b \Rightarrow f_{20c} = f_{01c}$

Para $a = 2b$, supondo propagação do modo TE_{10} apenas entre $10\,GHz \leq f \leq 20\,GHz$, temos:

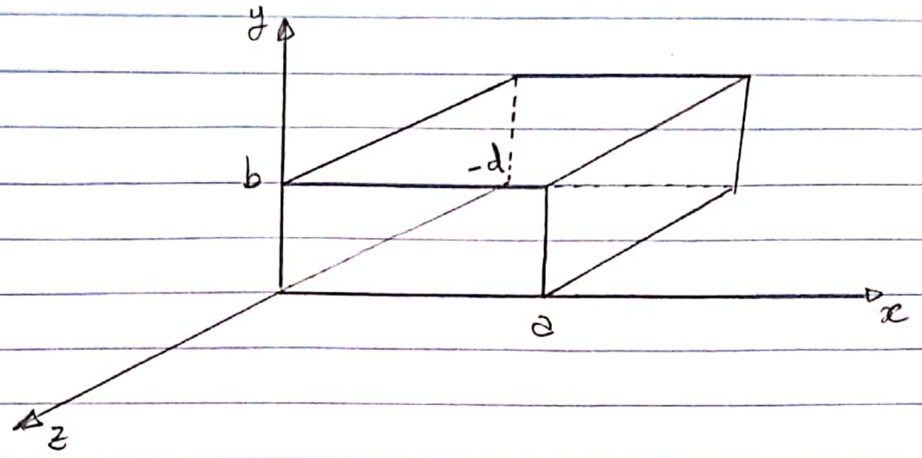
$f_{10c} = 10GHz$

$f_{20c} = f_{01c} = 20GHz$.

com $v = 3 \times 10^8\, m/s$ $\quad a = \frac{v}{2f_{10c}} = 1{,}5cm \quad b = \frac{v}{2f_{01c}} = 0{,}75\,cm$

b) # Cavidade Ressonante.

5b



É um guia de ondas com as aberturas fechadas. Neste caso, uma onda propagando na direção $\hat{z}$ é refletida pelas paredes em $z=0$ e em $z=-d$.

Para o caso TM: (usando (20) e (21) do der. anterior)

$$E_z = E_0 \sin(\beta_x x)\sin(\beta_y y)\left(e^{-j\beta_z z} + \rho e^{j\beta_z z}\right) \quad (1)$$

$$E_x = \frac{-j\beta_x\beta_z}{\beta_x^2+\beta_y^2} E_0 \cos(\beta_x x)\sin(\beta_y y)\left[e^{-j\beta_z z} - \rho e^{j\beta_z z}\right] \quad (2a)$$

H_x e H_y ←

$$E_y = \frac{-j\beta_y\beta_z}{\beta_x^2+\beta_y^2} E_0 \sin(\beta_x x)\cos(\beta_y y)\left[e^{-j\beta_z z} - \rho e^{j\beta_z z}\right] \quad (3a)$$

ver ao lado

Impondo as condições de contorno:

$$E_x(z=0) = E_y(z=0) = 0 \Rightarrow \rho = 1$$

$$E_z = 2E_0 \sin(\beta_x x)\sin(\beta_y y)\cos(\beta_z z) \quad (4)$$

$$E_x = \frac{-2\beta_x\beta_z}{\beta_x^2+\beta_y^2} E_0 \cos(\beta_x x)\sin(\beta_y y)\sin(\beta_z z) \quad (5a)$$

$$E_y = \frac{-2\beta_y\beta_z}{\beta_x^2+\beta_y^2} E_0 \sin(\beta_x x)\cos(\beta_y y)\sin(\beta_z z) \quad (6a)$$

ver ao lado

$$H_x = \frac{j\omega\epsilon\beta_y}{\beta_x^2+\beta_y^2} E_o \sin(\beta_x x)\cos(\beta_y y)\left[e^{-j\beta_z z} + \rho e^{j\beta_z z}\right] \quad (2b)$$

$$H_x = \frac{2j\omega\epsilon\beta_y}{\beta_x^2+\beta_y^2} E_o \sin(\beta_x x)\cos(\beta_y y)\cos(\beta_z z) \quad \text{p/ } \rho = 1 \quad (5b)$$

$$H_y = -\frac{j\omega\epsilon\beta_x}{\beta_x^2+\beta_y^2} E_o \cos(\beta_x x)\sin(\beta_y y)\left[e^{-j\beta_z z} + \rho e^{j\beta_z z}\right] \quad (3b)$$

$$H_y = \frac{-2j\omega\epsilon\beta_x}{\beta_x^2+\beta_y^2} E_o \cos(\beta_x x)\sin(\beta_y y)\cos(\beta_z z) \quad \text{p/ } \rho = 1 \quad (6b)$$

Além disso:

$$E_x(z=-d) = E_y(z=-d) = 0.$$

Isso implica q/:

$$\beta_z = \frac{p\pi}{d} \qquad p = 0, 1, 2, 3 \ldots \qquad (7)$$

Assim, o modo TM em uma cavidade é definido como:

$$TM_{mnp}$$

Lembrando m ou $n \neq 0$

p pode ser igual a zero, de modo q/ TM_{mn0} pode existir

A fim de q/ (4) - (6) sejam soluções da equação de onda, temos que:

$$\omega^2 \mu \varepsilon = \beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{d}\right)^2 \qquad (8)$$

Para uma dada escolha de m, n e p, apenas uma única frequência pode satisfazer (8).

Essa frequência é a frequência de ressonância

$$\omega_{mnp} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{d}\right)^2\right]^{1/2} \qquad (9)$$

Modos TE:

$$H_z = H_0 \cos(\beta_x x)\cos(\beta_y y)\left[e^{-j\beta_z z} + \rho e^{j\beta_z z}\right] \quad (10)$$

cond. cont: $E_x(z=0) = E_y(z=0) = 0$

de (13) e (12)

$$E_x = -\frac{j\omega\mu}{\beta_x^2+\beta_y^2}\frac{\partial}{\partial y}H_z = +\frac{j\omega\mu\beta_y}{\beta_x^2+\beta_y^2}H_0\cos(\beta_x x)\sin(\beta_y y)\left[e^{-j\beta_z z} + \rho e^{j\beta_z z}\right] \quad (11)$$

$$E_y = \frac{j\omega\mu}{\beta_x^2+\beta_y^2}\frac{\partial}{\partial x}H_z = -\frac{j\omega\mu\beta_x}{\beta_x^2+\beta_y^2}H_0\sin(\beta_x x)\cos(\beta_y y)\left[e^{-j\beta_z z} + \rho e^{j\beta_z z}\right] \quad (12)$$

$$E_x(z=0) = E_y(z=0) = 0 \Rightarrow \rho = -1$$

$$H_z = -2j H_0\cos(\beta_x x)\cos(\beta_y y)\sin(\beta_z z) \quad (13)$$

$$E_x = \frac{2\omega\mu\beta_y}{\beta_x^2+\beta_y^2}H_0\cos(\beta_x x)\sin(\beta_y y)\sin(\beta_z z) \quad (14)$$

$$E_y = -\frac{2\omega\mu\beta_x}{\beta_x^2+\beta_y^2}H_0\sin(\beta_x x)\cos(\beta_y y)\sin(\beta_z z) \quad (15)$$

$$H_x = \frac{1}{\beta_x^2+\beta_y^2}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x}H_z = \frac{-j\beta_z\beta_x}{\beta_x^2+\beta_y^2}H_0\sin(\beta_x x)\cos(\beta_y y)\left[-2j\,\overset{\cos}{\cancel{\sin}}(\beta_z z)\right]$$

$$H_x = +j\frac{2\beta_x\beta_z}{\beta_x^2+\beta_y^2}H_0\sin(\beta_x x)\cos(\beta_y y)\overset{\cos}{\cancel{\sin}}(\beta_z z) \quad (16)$$

$$H_y = \frac{1}{\beta_x^2+\beta_y^2}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y}H_z = \frac{-j\beta_z\beta_y}{\beta_x^2+\beta_y^2}H_0\cos(\beta_x x)\sin(\beta_y y)\left[-2j\,\overset{\cos}{\cancel{\sin}}(\beta_z z)\right]$$

$$H_y = +j\frac{2\beta_y\beta_z}{\beta_x^2+\beta_y^2}H_0\cos(\beta_x x)\sin(\beta_y y)\overset{\cos}{\cancel{\sin}}(\beta_z z) \quad (17)$$

Para modos TE, o raciocínio é similar.

$$H_z = -j2H_o \cos(\beta_x x)\cos(\beta_y y)\sin(\beta_z z) \qquad (10)$$

$$E_x = \frac{2\omega\mu\beta_y}{\beta_x^2+\beta_y^2} H_o \cos(\beta_x x)\sin(\beta_y y)\sin(\beta_z z) \qquad (11)$$

20/02/20

$$E_y = -\frac{2\omega\mu\beta_x}{\beta_x^2+\beta_y^2} H_o \sin(\beta_x x)\cos(\beta_y y)\sin(\beta_z z) \qquad (12)$$

As condições de contorno em $z=-d$ requerem:

$$E_x(z=-d) = E_y(z=-d) = 0$$

$$\beta_z = \frac{p\pi}{d} \qquad (18)$$

já sabemos q/: $\beta_x = \frac{m\pi}{a}$ e $\beta_y = \frac{n\pi}{b}$

mas quando $p=0 \Rightarrow H_z = 0$, logo o modo TE_{mn0} não existe.
Entretanto, os modos TE_{0np} ou TE_{m0p} podem existir.

A frequência de ressonância é:

$$\omega_{mnp} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{d}\right)^2\right]^{1/2} \qquad (19)$$

~~Se a>b>d, a freq resson mais baixa é p/~~